

## 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В настоящем разделе рассматривается метод конечных разностей, который является одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений с частными производными (уравнений математической физики).

### 5.1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

#### 5.1.1. Постановка задач для уравнений параболического типа

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

Если на границах  $x=0$  и  $x=l$  заданы значения искомой функции  $u(x,t)$  в виде

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \varphi_0(t), & x=0, & \quad t > 0; \\ u(l,t) &= \varphi_l(t), & x=l, & \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

т.е. *граничные условия первого рода*, и, кроме того, заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (5.4)$$

то задачу (5.1)-(5.4) называют *первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности* (5.1).

В терминах теории теплообмена  $u(x,t)$  – распределение температуры в пространственно-временной области  $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\}$ ,  $a^2$  – коэффициент температуропроводности, а (5.2), (5.3) с помощью функций  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_l(t)$  задают температуру на границах  $x=0$  и  $x=l$ .

Если на границах  $x=0$  и  $x=l$  заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_0(t), \quad x=0, \quad t > 0; \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_l(t), \quad x=l, \quad t > 0, \quad (5.6)$$

т.е. *граничные условия второго рода*, то задачу (5.1), (5.5), (5.6), (5.4) называют второй начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (5.1). В терминах теории теплообмена на границах в этом случае заданы тепловые потоки.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной

$$\alpha \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5.7)$$

$$\gamma \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \varphi_1(t), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

т.е. *граничные условия третьего рода*, то задачу (5.1), (5.7), (5.8), (5.4) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (5.1). В терминах теории теплообмена граничные условия (5.7), (5.8) задают теплообмен между газообразной или жидкой средой и границами расчетной области с неизвестными температурами  $u(0,t)$ ,  $u(l,t)$ .

Для пространственных задач теплопроводности в области  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  первая начально-краевая задача имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad M(x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0; \end{aligned} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u(M, t) = \varphi(M, t), \quad M(x, y, z) \in \Gamma, \quad t > 0; \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u(M, 0) = \psi(M), \quad M(x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad t > 0. \end{aligned} \right. \quad (5.11)$$

Аналогично ставится вторая и третья начально-краевые задачи для пространственного уравнения задачи (5.9) – (5.11).

На практике часто ставятся начально-краевые задачи теплопроводности со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются граничные условия различных родов.

### 5.1.2. Понятие о методе конечных разностей. Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа

Основные определения, связанные с методом конечных разностей, рассмотрим на примере конечно-разностного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (5.1)-(5.4).

Нанесем на пространственно-временную область  $0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T$  конечно-разностную сетку  $\omega_{h\tau}$

$$\omega_{h\tau} = \{x_j = jh, j = \overline{0, N}; t^k = k\tau, k = \overline{0, K}\} \quad (5.12)$$

с пространственным шагом  $h=l/N$  и шагом по времени  $\tau=T/K$  (рис 5.1).

Введем два *временных слоя*: нижний  $t^k = k\tau$ , на котором распределение искомой функции  $u(x_j, t^k)$ ,  $j = \overline{0, N}$  известно (при  $k=0$  распределение определяется начальным условием (6.4)  $u(x_j, t^0) = \psi(x_j)$ ) и верхний временной слой  $t^{k+1} = (k+1)\tau$ , на котором

распределение искомой функции  $u(x_j, t^{k+1})$ ,  $j = \overline{0, N}$  подлежит определению.

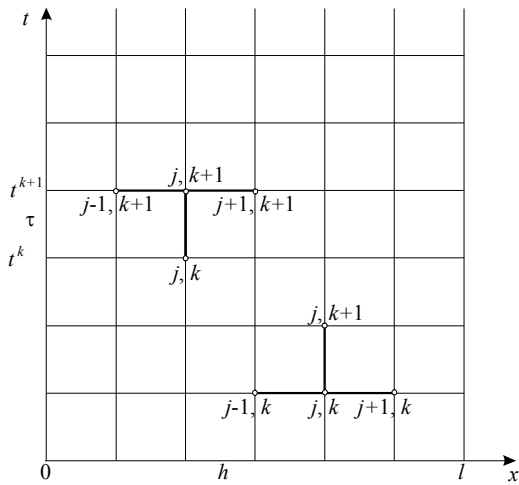


Рис. 5.1. Конечно-разностная сетка

*Сеточной функцией задачи* (5.1)-(5.4) (обозначение  $u_j^k$ ) назовем однозначное отображение *целых* аргументов  $j, k$  в значения функции  $u_j^k = u(x_j, t^k)$ .

На введенной сетке (5.12) введем сеточные функции  $u_j^k, u_j^{k+1}$ , первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в задаче (5.1)-(5.4) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы

отношением конечных разностей (см. раздел «Численное дифференцирование»), получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau), \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2). \quad (5.14)$$

Подставляя (5.13), (5.14) в задачу (5.1)-(5.4), получим *явную конечно-разностную схему* для этой задачи в форме

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^k = \varphi_0(t^k), \quad u_N^k = \varphi_l(t^k), \quad k = \overline{0, K}; \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (5.15)$$

где для каждого  $j$ -го уравнения все значения сеточной функции известны, за исключением одного -  $u_j^{k+1}$ , которое может быть определено *явно* из соотношений (5.15).

В соотношения (5.15) краевые условия ( $j = 0, j = N$ ) входят при значениях  $j=1$  и  $j=N-1$ , а начальное условие – при  $k=0$ .

Если в (5.14)

дифференциальный

оператор по

пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (5.16)$$

то после подстановки (5.13), (5.16) в задачу (5.1)-(5.4), получим *неявную конечно-разностную схему* для этой задачи

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}), \quad k = \overline{0, K-1}; \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}.$$

(5.17)

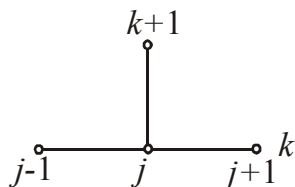
Теперь сеточную функцию  $u_j^{k+1}$  на верхнем временном слое можно получить из решения СЛАУ (5.17) с трехдиагональной матрицей. Эта СЛАУ в форме, пригодной для использования метода прогонки, имеет вид

$$a_1 = 0; \quad \begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1 \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = \overline{2, N-2} \\ c_{N-1} = 0; \quad a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1, \end{cases}$$

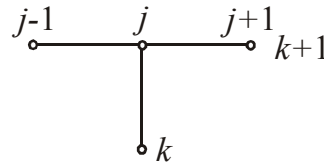
где  $a_j = \sigma, j = \overline{2, N-1}; \quad b_j = -(1 + 2\sigma), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad c_j = \sigma, \quad j = \overline{1, N-2};$

$$d_j = -u_j^k, \quad j = \overline{2, N-2}; \quad d_1 = -(u_1^k + \sigma \varphi_0(t^{k+1})); \quad d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma \varphi_l(t^{k+1})); \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

*Шаблоном* конечно-разностной схемы называют ее геометрическую интерпретацию



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

на конечно-разностной сетке.

На рисунке 5.2 приведены шаблоны для явной (5.15) и неявной (5.17) конечно-разностных схем при аппроксимации задачи (5.1)-(5.4).

Явная конечно-разностная схема (5.15), записанная в форме

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2 \dots, \quad (5.18)$$

обладает тем *достоинством*, что решение на верхнем временном слое  $t^{k+1}$  получается сразу (без решения СЛАУ) по значениям сеточных функций на нижнем временном слое  $t^k$ , где решение известно (при  $k=0$  значения сеточной функции формируются из начального условия (5.4.)). Но эта же схема обладает существенным *недостатком*, поскольку она является условно устойчивой с условием  $\sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ , накладываем на сеточные характеристики  $\tau$  и  $h$ .

С другой стороны, неявная конечно-разностная схема (5.17), записанная в форме

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.19)$$

приводит к необходимости решать СЛАУ, но зато эта схема абсолютно устойчива.

Проанализируем схемы (5.18), (5.19). Пусть точное решение, которое не известно, возрастает по времени, т.е.  $u_j^{k+1} > u_j^k$ . Тогда, в соответствии с явной схемой (5.18) разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, т.к.  $u_j^{k+1}$  определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени.

Для неявной схемы (5.19) на возрастающем решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое.

На убывающем решении картина изменяется противоположным образом: явная конечно-разностная схема завышает решения, а неявная - занижает (см. рис. 5.3)

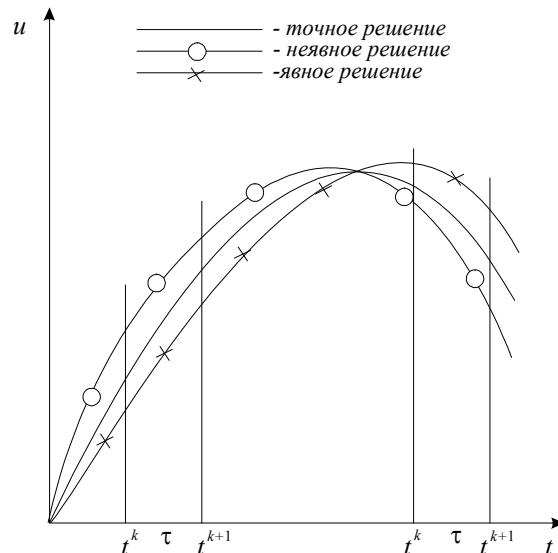


Рис. 5.3. Двусторонний метод аппроксимации

На основе этого анализа возникла идея о построении более точной неявно-явной конечно-разностной схемы с весами при пространственных конечно-разностных операторах, причем при измельчении шагов  $\tau$  и  $h$  точное (неизвестное) решение может быть взято в "вилку" сколь угодно узкую, т.к. если явная и неявная схемы аппроксимируют дифференциальную задачу и эти схемы устойчивы, то при стремлении сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$  к нулю, решения по явной и неявной схемам стремятся к точному решению с разных сторон.

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (5.20)$$

где  $\theta$  - вес неявной части конечно-разностной схемы,  $1-\theta$  - вес для явной части, причем  $0 \leq \theta \leq 1$ . При  $\theta=1$  имеем полностью неявную схему, при  $\theta=0$  - полностью явную схему, и при  $\theta=1/2$  - схему Кранка-Николсона.

Для схемы Кранка-Николсона ( $\theta=1/2$ ) порядок аппроксимации составляет  $O(\tau^2 + h^2)$ , т.е. на один порядок по времени выше, чем обычные явная или неявная схемы.

Неявно-явная схема с весами (5.20) абсолютно устойчива при  $1/2 \leq \theta \leq 1$  и условно устойчива с условием  $\sigma \leq \frac{1}{2}$  при  $0 \leq \theta < 1/2$ .

Таким образом, схема Кранка-Николсона (5.20) при  $\theta=1/2$  абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной  $x$ .

### 5.1.3. Аппроксимация граничных условий, содержащих производные

В задачах математической физики вообще, и в задачах теплопроводности в частности, граничные условия 1-го рода аппроксимируются точно в узлах на границе расчетной области. Граничные условия 2-го и 3-го рода отличаются тем, что в них присутствует производная первого порядка искомой функции по пространственной переменной. Поэтому для замыкания конечно-разностной схемы необходима их аппроксимация. Простейшим вариантом является аппроксимация производных направленными разностями первого порядка:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

Тогда в общем случае граничных условий 3-го рода (5.7), (5.8) уравнения, связывающие значения искомой функции в двух крайних узлах разностной сетки, выглядят следующим образом:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}) + O(h),$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}) + O(h).$$

Дополняя полученными уравнениями явную конечно-разностную аппроксимацию во внутренних узлах, получим явную разностную схему для третьей начально-краевой задачи (5.1), (5.4), (5.7), (5.8).

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}).$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой  $t^{k+1}$  с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}.$$

Т.е. сначала рассчитываются значения искомой функции во всех внутренних узлах на новом временном слое, а затем определяются значения на границах.

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем следующий разностный аналог дифференциальной задачи:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0,$$

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} = d_N,$$

$$\text{где } b_0 = \beta - \alpha / h, \quad c_0 = \alpha / h, \quad d_0 = \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha / h},$$

$$a_N = -\gamma / h, \quad b_N = \delta + \gamma / h, \quad d_N = \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma / h},$$

$$a_j = \sigma, \quad b_j = -(1 + 2\sigma), \quad c_j = \sigma, \quad d_j = -u_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

В результате для получения решения на новом временном слое  $t^{k+1}$  решается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Аналогичная картина имеет место и при использовании неявно-явной схемы с весами.

Принципиальной особенностью рассмотренного выше подхода является первый порядок аппроксимации граничных условий. Т.е. порядок аппроксимации в граничных узлах ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах расчетной области. При этом глобальный порядок аппроксимации (во всей расчетной области) равен *наименьшему* относительно всех узлов сетки порядку аппроксимации.

Одним из способов повышения порядка аппроксимации граничных условий является использование формул численного дифференцирования второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t^{k+1}) = \frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t^{k+1}) = \frac{u_{N-2}^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + 3u_N^{k+1}}{2h} + O(h^2).$$

В случае явной схемы алгоритм вычисления решения на новом временном слое при такой аппроксимации граничных условий не приобретает принципиальных изменений. Если же используется неявная схема, то получающаяся при этом СЛАУ теряет трехдиагональный вид (первое и последнее уравнение содержат три неизвестных). Этот недостаток легко устраним, т.к. путем линейной комбинации первого уравнения со вторым (последнего с предпоследним) можно добиться исключения третьего неизвестного из соответствующего уравнения. Однако при этом возможно нарушение диагонального преобладания матрицы и, следовательно, нарушение условий применимости метода прогонки.

Более эффективным является подход, позволяющий повысить порядок аппроксимации граничных условий без увеличения числа узлов в аппроксимационных соотношениях. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим следующий пример.

### **Пример 5.1.**

Решить третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, содержащего как конвективные члены (пропорциональные производной  $\partial u / \partial x$ ), так и источниковые члены, содержащие искомую функцию  $u(x, t)$ :



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + gu, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \varphi_0(t), & x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \varphi_1(t), & x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.21) \\ (5.22) \\ (5.23) \\ (5.24) \end{matrix}$$

### Решение.

Во внутренних узлах конечно-разностной сетки неявная конечно-разностная схема для уравнения (5.21) имеет вид:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \frac{b}{2h} (u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}) + gu_j^{k+1} + O(\tau + h^2),$$

$$j = \overline{1, N-1}. \quad (5.25)$$

Если производные первого порядка в граничных условиях (5.22) и (5.23) аппроксимировать по следующей схеме (с помощью отношения конечных разностей справа и слева)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

то граничные условия аппроксимируются с первым порядком, и глобальный порядок будет равен первому порядку несмотря на то, что во всех остальных узлах порядок аппроксимации по пространственным переменным равен двум. Для сохранения порядка аппроксимации, равного двум, в граничных узлах разложим на точном решении значение  $u_1^{k+1}$  в окрестности точки  $x=0$  в ряд Тейлора по переменной  $x$  до третьей производной включительно, а  $u_{N-1}^{k+1}$  - в аналогичный ряд в окрестности точки  $x=l$ , получим (в предположении что функция  $u(x,t)$  в граничных узлах имеет первые производные по времени и вторые - по  $x$ ):

$$u_1^{k+1} = u(0+h, t^{k+1}) = u_0^{k+1} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (5.26)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u(l-h, t^{k+1}) = u_N^{k+1} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (5.27)$$

Далее, подставим сюда значения второй производной в граничных узлах, полученные из дифференциального уравнения (5.21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{j=0,N}^{k+1} = \left( \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{a^2} u \right) \Big|_{j=0,N}^{k+1},$$

и найдем из полученных выражений (5.26), (5.27) значения первой производной  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j=0,N}^{k+1}$

в граничных узлах с порядком  $O(\tau + h^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 - bh)} \cdot (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2a^2 - bh} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^{k+1} + \frac{gh}{2a^2 - bh} \cdot u_0^{k+1} + O_1(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} \cdot (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \frac{h}{2a^2 + bh} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_N^{k+1} - \frac{gh}{2a^2 + bh} \cdot u_N^{k+1} + O_2(h^2).$$

Подставляя  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{k+1}$  в (5.22), а  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^{k+1}$  в (5.23) и аппроксимируя полученные

соотношения в соответствующих граничных узлах (при этом  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^{k+1} = (u_0^{k+1} - u_0^k) / \tau + O(\tau)$ ,

$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_N^{k+1} = (u_N^{k+1} - u_N^k) / \tau + O(\tau)$ ), получим алгебраические уравнения для граничных узлов,

в каждом из которых два неизвестных:

$$b_0 \cdot u_0^{k+1} + c_0 \cdot u_1^{k+1} = d_0, \quad j = 0; \quad (5.28)$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh - \frac{\beta}{\alpha} (2a^2 - bh), \quad c_0 = -\frac{2a^2}{h};$$

$$d_0 = \frac{h}{\tau} \cdot u_0^k - \varphi_0(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 - bh}{\alpha};$$

$$a_N \cdot u_{N-1}^{k+1} + b_N \cdot u_N^{k+1} = d_N, \quad j = N; \quad (5.29)$$

$$a_N = -\frac{2a^2}{h}; \quad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh + \frac{\delta}{\gamma} \cdot (2a^2 + bh), \quad c_n = 0;$$

$$d_N = \frac{h}{\tau} \cdot u_N^k + \varphi_1(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 + bh}{\gamma}.$$

Таким образом, (5.28) - конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (5.22) на левой границе  $x=0$ , а (5.29) - конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (5.23) на правой границе  $x=l$ , которые сохраняют тот же порядок аппроксимации, что и в конечно-разностной аппроксимации (5.25) дифференциального уравнения (5.21).

Приписывая к граничным конечно-разностным уравнениям (5.28), (5.29), каждое из которых содержит два значения сеточной функции, алгебраические уравнения (5.25), записанные в виде

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad (5.30)$$

$$a_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h}\right); \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau} - g; \quad c_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b}{2h}\right); \quad d_j = \frac{1}{\tau} \cdot u_j^k,$$

получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемую методом прогонки ( $a_0 = 0; c_N = 0$ )

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}}; \quad B_j = \frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}} \quad \left( A_0 = -\frac{c_0}{b_0}; B_0 = \frac{d_0}{b_0}; A_N = 0 \right), \quad j = \overline{0, N}; \quad (5.31)$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j \quad (u_N^{k+1} = B_N), \quad j = N, N-1, \dots, 0. \quad (5.32)$$

Изложенный метод аппроксимации краевых условий, содержащих производные по пространственным переменным, повышает не только порядок аппроксимации, но и сохраняет консервативность конечно-разностной схемы, т.е. в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы сохранения, на основе которых выведены дифференциальные соотношения задачи (5.21) - (5.24).

Аналогичный подход можно осуществить в краевых задачах для дифференциальных уравнений любых типов.

## 5.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

### 5.2.1. Постановка задач для уравнений гиперболического типа

Классическим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение, которое в области  $0 < x < l, \quad t > 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t = 0.$$

Данное уравнение описывает, в частности, процесс малых поперечных колебаний струны. В этом случае  $u(x, t)$  - поперечные перемещения (колебания) струны,  $a$  - скорость распространения малых возмущений в материале, из которого изготовлена струна.

Если концы струны движутся по заданным законам, то есть на концах заданы перемещения (или значения искомой функции), то первая начально-краевая задача для волнового уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.33) \\ (5.34) \\ (5.35) \\ (5.36) \\ (5.37) \end{array}$$

причем, если концы струны жестко закреплены, то  $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$ .

Как видно, в задачах для волнового уравнения, кроме начального распределения искомой функции, задается еще распределение начальной скорости перемещения.

Если на концах струны заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной (то есть на концах заданы значения первых производных по переменной  $x$ ), то ставится *вторая начально-краевая задача для волнового уравнения*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

В условиях, когда концы струны *свободны*, функции  $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$ .

Наконец в условиях, когда концы закреплены *упруго*, т.е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, ставится *третья начально-краевая задача для волнового уравнения*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_1(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Аналогично ставятся двумерные и трехмерные начально-краевые задачи для двумерного и трехмерного волнового уравнения.

### 5.2.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа

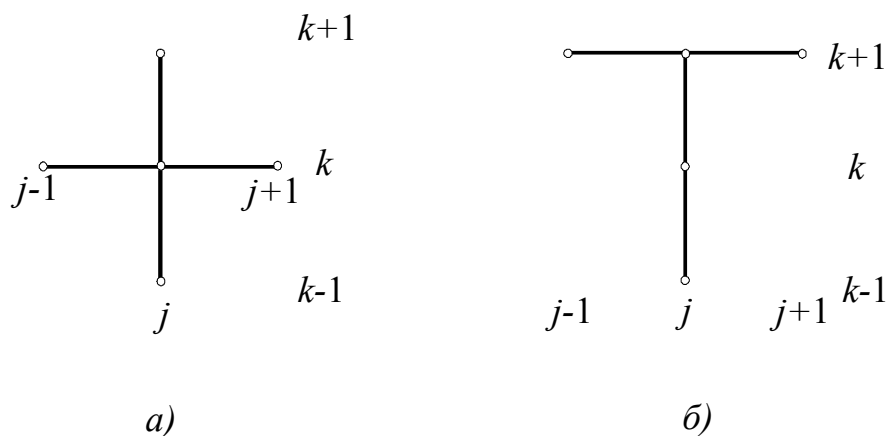
Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения (5.33)-(5.37). На пространственно-временной сетке (5.12) будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (5.33) одной из следующих конечно-разностных схем:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

с шаблоном на рисунке 5.4а и

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

с шаблоном на рисунке 5.4 б



При этом схема (5.38) является *явной*. С ее помощью решение  $u_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  определяется сразу, поскольку значения сеточных функции  $u_j^{k-1}$ ,  $u_j^k$  на нижних временных слоях должны быть известны. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум, как по пространственной, так и по временной переменной. При этом явная конечно-разностная схема (5.38) для волнового уравнения условно устойчива с условием  $\sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} < 1$ , накладываемым на сеточные характеристики  $\tau$  и  $h$ .

Схема (5.39) является *неявной схемой* и обладает абсолютной устойчивостью. Ее можно свести к СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемой методом прогонки.

В обеих схемах необходимо знать значения  $u_j^{k-1}$ ,  $u_j^k$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  на нижних временных слоях. Для  $k = 1$  это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (5.40)$$

где  $\psi_1(x)$  - функция из начального условия (5.36).

Для определения  $u_j^1$  можно воспользоваться простейшей аппроксимацией второго начального условия (5.37):

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j).$$

Откуда для искомым значений  $u_j^1$  получаем следующее выражение:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Недостатком такого подхода является первый порядок аппроксимации второго начального условия. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся следующей процедурой.

Разложим  $u_j^1$  в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности  $t=0$ :

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^0 \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3). \quad (5.41)$$

Для определения второй производной в выражении (5.41) воспользуемся исходным дифференциальным уравнением  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j)$ .

В результате получаем искомую сеточную функцию  $u_j^1$  со вторым порядком точности:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2\psi_1''(x_j)\frac{\tau^2}{2}.$$

После определения из начальных условий значений сеточных функций  $u_j^0$ ,  $u_j^1$  на двух первых временных слоях вычислительный процесс продолжается согласно схемам (5.38) или (5.39). При этом аппроксимация краевых условий (5.34) и (5.35) производится аналогично тому, как это описывалось выше для уравнений параболического типа. Для иллюстрации этого этапа рассмотрим следующий пример.

**Пример 5.2.**

Выписать явную конечно-разностную схему для третьей начально-краевой задачи.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

**Решение.**

Аппроксимация дифференциального уравнения на шаблоне (5.4б) выглядит следующим образом:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} + cu_j^k + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

где  $f_j^k = f(x_j, t^k)$ .

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}).$$

В результате переход на новый временной слой представляется следующим алгоритмом:

$$u_j^{k+1} = u_{j+1}^k \left( \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + b \frac{\tau^2}{2h} \right) + u_j^k \left( -2 \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + 2 + c \tau^2 \right) + u_{j-1}^k \left( \frac{a^2 \tau^2}{h^2} - b \frac{\tau^2}{2h} \right) - u_j^{k-1} + \tau^2 f_j^k,$$

$$u_0^{k+1} = - \frac{\alpha / h}{\beta - \alpha / h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha / h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma / h}{\delta + \gamma / h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma / h}.$$

Таким образом, сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних узлах на новом временном слое, после чего из аппроксимации граничных условий находятся значения функции  $u$  в крайних узлах.

Для окончательного замыкания вычислительного процесса определим, исходя из начальных условий, значения искомой функции на двух первых временных слоях  $t^0, t^1$ .

В начальный момент времени значения  $u_j$  определяются точно:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j).$$

Если воспользоваться аппроксимацией первого порядка по времени, то как было показано выше, получим

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Для повышения порядка аппроксимации разложим  $u_j^1$  в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности  $t=0$ :

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^0 \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3),$$

где, согласно исходному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^0 + b \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^0 + c u_j^k + f_j^k = a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k.$$

Окончательно получаем

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + (a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k) \frac{\tau^2}{2}.$$

### 5.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

#### 5.3.1. Постановка задач для уравнений эллиптического типа

Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или уравнение Лапласа при  $f(x, y) \equiv 0$ .

Здесь функция  $u(x, y)$  имеет различный физический смысл, а именно: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т.п.

Если на границе  $\Gamma$  расчетной области  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  задана искомая функция, то соответствующая *первая краевая* задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется *задачей Дирихле*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.43)$$

Если на границе  $\Gamma$  задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая *вторая краевая* задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа или Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.45)$$

При этом  $n$  – направление внешней к границе  $\Gamma$  нормали.

Более приемлемой является координатная форма краевого условия (5.45)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, \hat{i}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, \hat{j}) = \varphi(x, y),$$

где  $\cos(\hat{n}, \hat{i})$ ,  $\cos(\hat{n}, \hat{j})$  – направляющие косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\hat{i}$  и  $\hat{j}$  орты базисных векторов.

Наконец третья краевая задача для уравнения Пуассона (Лапласа) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

### 5.3.2. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим краевую задачу для уравнений Лапласа или Пуассона (5.42), (5.43) в прямоугольнике  $x \in [0, l_1], y \in [0, l_2]$ , на который наложим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, N_1}; y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}. \quad (5.46)$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме (вводится сеточная функция  $u_{ij}, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ ):

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j), \quad (5.47)$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}$$

которая на шаблоне (5.5) имеет второй порядок по переменным  $x$  и  $y$ , поскольку шаблон центрально симметричен.

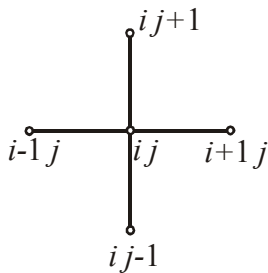
СЛАУ (5.47) имеет пяти-диагональный вид (каждое уравнение содержит пять неизвестных и при соответствующей нумерации переменных матрица имеет ленточную структуру). Решать ее можно различными методами линейной алгебры, например, итерационными методами, методом матричной прогонки и т.п.

Рассмотрим разностно-итерационный метод Либмана численного решения задачи Дирихле (5.42), (5.43). Для простоты изложения этого метода примем  $h_1 = h_2 = h$ , тогда из схемы (5.47) получим ( $k$ -номер итерации)

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 \cdot f_{i,j}], \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad (5.48)$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

На каждой координатной линии (например,  $y_j = const, j = \overline{1, N_2 - 1}$ ) с помощью



линейной интерполяции (см. рис.5.6) граничных значений

$\varphi(x, y)$  определим  $u_{i,j}^{(0)}$  на нулевой итерации, подставив

которые в (5.48), получим распределение  $u_{i,j}^{(1)}$  на первой

итерации

$$u_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)} + u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)} - h^2 \cdot f_{i,j}], \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j =$$

Рис. 5.5. Центрально-симметричный шаблон для уравнения Лапласа

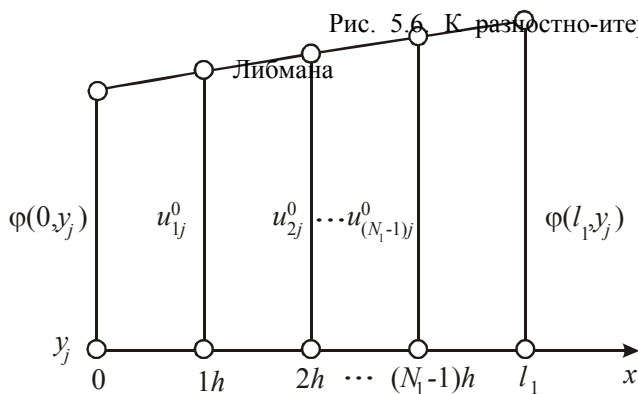


Рис. 5.6. К разностно-итерационному методу

Это распределение

$u_{i,j}^{(1)}$  снова

подставляются в (5.48),

получаем распределение  $u_{i,j}^{(2)}$  и т.д.

Процесс Лиомана прекращается, когда

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad \|u^{(k)}\| = \max_{i,j} |u_{i,j}^{(k)}|,$$

где  $\varepsilon$  - наперед заданная точность.

При решении задач с граничными условиями 2-го и 3-го родов наряду с аппроксимацией дифференциального уравнения производится также аппроксимация граничных условий. Этот вопрос подробно рассмотрен в разделе 5.1.3. Здесь в качестве примера приведем разностную схему, аппроксимирующую третью краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

**Пример 5.3.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad x \in (0, l_1), y \in (0, l_2); \\ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \beta_1 u(0, y) = \varphi_1(y), \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l_1, y) + \beta_2 u(l_1, y) = \varphi_2(y), \\ \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + \beta_3 u(x, 0) = \varphi_3(x), \\ \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, l_2) + \beta_4 u(x, l_2) = \varphi_4(x) \end{array} \right.$$

Как и ранее в прямоугольнике  $x \in [0, l_1], y \in [0, l_2]$  построим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, N_1}; y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}.$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах по рассмотренной выше центрально-разностной схеме

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\alpha_1 \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_1} + \beta_1 u_{0j} = \varphi_1(y_j), \quad j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_2 \frac{u_{N_1j} - u_{N_1j}}{h_1} + \beta_2 u_{N_1j} = \varphi_2(y_j), \quad j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_3 \frac{u_{i1} - u_{i0}}{h_2} + \beta_3 u_{i0} = \varphi_3(x_i), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}$$

$$\alpha_4 \frac{u_{iN_2} - u_{iN_2-1}}{h_2} + \beta_4 u_{iN_2} = \varphi_4(x_i), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}.$$

В результате получена СЛАУ, содержащая  $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1) - 4$  уравнений относительно неизвестных  $u_{ij}$  ( $i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ , при этом угловые узлы с координатами  $(i, j)$ , равными  $(0, 0)$ ,  $(0, N_2)$ ,  $(N_1, 0)$ ,  $(N_1, N_2)$  в вычислениях не участвуют). Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

*Замечание.* Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим. С более эффективными методами решения таких СЛАУ можно познакомиться, например, в [8].

## 5.4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

К основным понятиям, связанным с методом конечных разностей относятся следующие понятия: аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости (или точность). Определим каждое из этих понятий.

### Аппроксимация и порядок аппроксимации

Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

где  $L$  - один из дифференциальных операторов

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{— диффузионный;} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{— волновой;} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{— лапласиан.} \end{cases}$$

$U(x,y)$ -искомая функция удовлетворяющая дифференциальной задаче;  $f$ -входные данные (т.е. начальные и краевые условия, правые части и т.п.). Операторная форма  $(LU)_h = f_h$  описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма  $L_h U_h = f_h$  описывает конечно-разностную схему на точном решении  $U(x,t)$ , т.е. в конечно-разностной схеме вместо сеточных значений сеточной функции подставлены точные (неизвестные) значения искомой функции. Для перечисленных дифференциальных операторов  $L$  конечно-разностные операторы  $L_h$  имеют вид

$$L_h = \begin{cases} \frac{\Delta}{\tau} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2}; \end{cases}$$

Наконец, операторная форма конечно-разностной схемы имеет вид

$$L_h u_h = f_h \tag{5.49}$$

Введём норму сеточной функции, например, с помощью выражения

$$\|u^k\| = \max_j |u_j^k|, \quad k=0,1,2,\dots \quad (5.50)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности  $\|(LU)_h - L_h U_h\|$  стремится к нулю при  $\tau, h \rightarrow 0$

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.51)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении с порядком  $p$  по времени и порядком  $q$  по пространственной переменной, если какая-либо норма разности  $\|(LU)_h - L_h U_h\|$  удовлетворяет равенству

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (5.52)$$

Таким образом, если конечно-разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, то речь идёт о близости дифференциального и конечно-разностного операторов в узлах сетки.

### Устойчивость

Пусть в конечно-разностной схеме (5.49) входные данные  $f_h$  получили возмущения и стали  $\tilde{f}_h$ . Тогда сеточная функция  $u_h$  также получит возмущение и станет  $\tilde{u}_h$ .

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) устойчива по входным данным, если найдется такая ограниченная константа  $K$ , не зависящая от сеточных характеристик  $\tau, h$  и входных данных  $f_h$ , что выполняется неравенство

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|. \quad (5.53)$$

Таким образом, понятие устойчивости интерпретируется следующим образом: конечно-разностная схема устойчива, если для малых возмущений входных данных (начально-краевых условий и правых частей) конечно-разностная схема обеспечивает малые возмущения сеточной функции  $u_h$ , т.е. решение с помощью конечно-разностной схемы находится под контролем входных данных.

Если во входные данные  $f_h$  входят только начальные условия или только краевые условия, или только правые части, то говорят об устойчивости соответственно по начальным условиям, по краевым условиям или по правым частям.

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) абсолютно (безусловно) устойчива, если неравенство (5.53) выполняется при любых значениях сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$ , т.е. на шагах сетки не накладывается никаких ограничений.

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) *условно устойчива*, если неравенство (5.53) выполняется для сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$ , на которые накладываются определённые ограничения.

### Сходимость и порядок сходимости

**Определение.** Решение  $u_h$ , полученное с помощью конечно-разностной схемы (5.49), сходится к точному решению  $U$ , если какая-либо норма разности  $\|U - u_h\|$  стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик  $\tau$ ,  $h$

$$\|U - u_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.54)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (5.49) имеет  $p$ -й порядок сходимости (порядок точности) по времени и  $q$ -й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности  $\|U - u_h\|$  удовлетворяет равенству

$$\|U - u_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (5.55)$$

Таким образом, порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

При численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимость. Однако следующая теорема утверждает, что достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость и, в случае положительного ответа, сходимость будет обеспечена.

**Теорема эквивалентности.** Если конечно-разностная схема (5.49) *аппроксимирует* на точном решении дифференциальную задачу с  $r$ -м порядком по времени и  $q$ -м порядком по пространственной переменной и эта схема *устойчива*, то решение с помощью этой конечно-разностной схемы *сходится* к решению дифференциальной задачи с  $r$ -м порядком по времени и  $q$ -м порядком по пространственной переменной.

## 5.5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

При численном решении многомерных задач математической физики исключительно важным является вопрос об *экономичности* используемых методов.

Конечно - разностную схему будем называть экономичной, если число выполняемых операций

(операций типа умножения) пропорционально числу узлов сетки.

За последние 50 лет разработано значительное количество экономических разностных схем численного решения многомерных задач математической физики, основанных на *расщеплении* пространственных дифференциальных операторов по координатным направлениям и использовании метода скалярной прогонки вдоль этих направлений.

Из экономических конечно-разностных схем, получивших наибольшее распространение, в данном разделе рассматриваются схема *метода переменных направлений* и схема *метода дробных шагов*. Все эти методы будем называть общим термином - *методы расщепления*.

Рассмотрим эти методы на примере задачи для двумерного уравнения параболического типа в прямоугольнике со сторонами  $l_1, l_2$  и граничными условиями I-го рода.

Для пространственно-временной области

$\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T], t \in [0, T], \bar{G} = G + \Gamma, G = l_1 \times l_2$  рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.71)$$

$$u(x, 0, t) = \varphi_1(x, t), \quad x \in [0, l_1], \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (5.72)$$

$$u(x, l_2, t) = \varphi_2(x, t), \quad x \in [0, l_1], \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (5.73)$$

$$u(0, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad x = 0, \quad y \in [0, l_2], \quad t > 0; \quad (5.74)$$

$$u(l_1, y, t) = \varphi_4(y, t), \quad x = l_1, \quad y \in [0, l_2], \quad t > 0; \quad (5.75)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, l_1], \quad y \in [0, l_2], \quad t = 0. \quad (5.76)$$

Введем пространственно-временную сетку с шагами  $h_1, h_2, \tau$  соответственно по переменным  $x, y, t$ :

$$\omega_{h_1 h_2}^\tau = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, I}; x_j = jh_2, j = \overline{0, J}; t^k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (5.77)$$

и на этой сетке будем аппроксимировать дифференциальную задачу (5.71)-(5.76) методом конечных разностей.

#### Метод переменных направлений

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени  $\tau$  разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один из



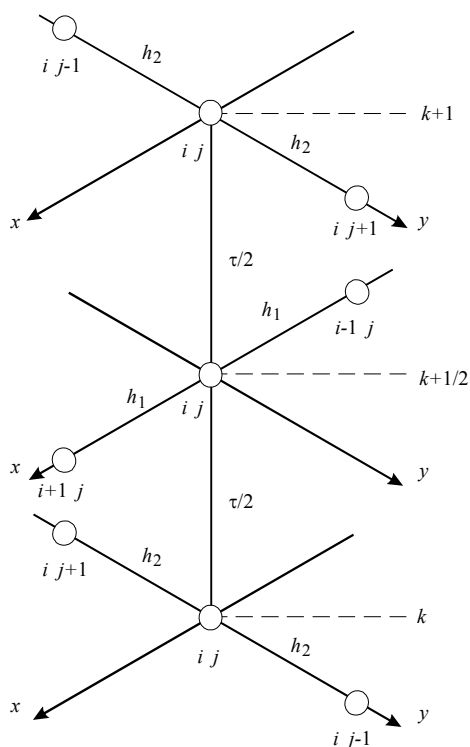
пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задачи (5.71)-(5.76) имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k) + f_{ij}^{k+1/2}, \quad (5.78)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + f_{ij}^{k+1/2}. \quad (5.79)$$

В подсхеме (5.78) на первом дробном шаге  $\tau/2$  оператор  $a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  аппроксимируется неявно, а оператор  $a \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – явно (в результате весь конечно-разностный оператор по переменной  $y$  переходит в правые части, поскольку  $u_{ij}^k$  известно). С помощью скалярных прогонок в количестве, равном числу  $J-1$ , в направлении переменной  $x$  получаем распределение сеточной функции  $u_{ij}^{k+1/2}$ ,  $i = \overline{1, I-1}$ ,  $j = \overline{1, J-1}$  на первом временном полуслое  $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$ .

В подсхеме (5.79) оператор  $a \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  аппроксимируется неявно на верхнем временном



слое  $t^{k+1} = (k+1)\tau$ , а оператор  $a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  – явно в момент времени  $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$  (конечно-разностный аналог этого оператора переходит в правые части). С помощью скалярных прогонок в направлении переменной  $y$  в количестве, равном числу  $I-1$  получаем распределение сеточной функции  $u_{ij}^{k+1}$ ,  $i = \overline{1, I-1}$ ,  $j = \overline{1, J-1}$  на втором полуслое  $t^{k+1} = t^{k+1/2} + \tau/2$ . Шаблон схемы МПН представлен на рис. 5.7.

Можно показать, что в двумерном случае схема МПН абсолютна устойчива. К достоинствам метода

Рис. 5.7 Шаблон схемы метода переменных направлений

переменных направлений можно отнести высокую точность, поскольку метод имеет второй порядок точности по времени. К *недостаткам* можно отнести условную устойчивость при числе пространственных переменных больше двух. Кроме этого, МПН условно устойчив в задачах со смешанными производными уже в двумерном случае.

### Метод дробных шагов

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные. Он обладает довольно значительным запасом устойчивости и в задачах со смешанными производными.

Для задачи (5.71) - (5.76) схема МДШ имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{f_{ij}^k}{2}, \quad (5.80)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2}. \quad (5.81)$$

С помощью чисто неявной подсхемы (5.80) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси  $x$  в количестве, равном  $J-1$ , в результате чего получаем сеточную функцию  $u_{ij}^{k+1/2}$ . На втором дробном шаге по времени с помощью подсхемы (5.81) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси  $y$  в количестве, равном  $I-1$ , в результате чего получаем сеточную функцию  $u_{ij}^{k+1}$ . Шаблон схемы МДШ приведен на рис.7.2.

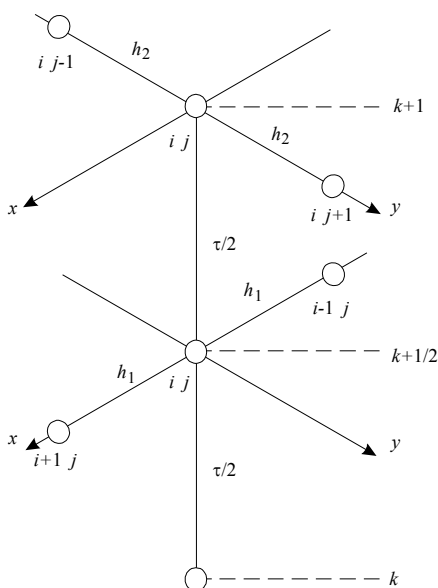


Рис.5.8. Шаблон схемы метода дробных шагов

Схема МДШ имеет порядок  $O(\tau + |h|^2)$ , т.е. первый порядок по времени и второй – по переменным  $x$  и  $y$ .

В литературе МДШ называют также методом покоординатного расщепления и локально-одномерным методом.

К достоинствам схемы МДШ можно отнести простоту в алгоритмизации и программировании и абсолютную устойчивость с большим запасом устойчивости даже для задач, содержащих смешанные производные.

К недостаткам МДШ относятся следующие: на каждом дробном шаге достигается частичная аппроксимация, полная аппроксимация достигается на последнем дробном шаге, т.е. имеет место суммарная аппроксимация; схема имеет первый порядок точности по времени.

#### Методы расщепления численного решения эллиптических задач

Для стационарных многомерных задач математической физики искомая функция в задаче (5.71)–(5.76) не зависит от времени и, следовательно, уравнение (5.71) становится уравнением эллиптического типа (нет производной  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ), т.е. уравнением Лапласа или Пуассона, а поскольку и начальное условие (5.76) отсутствует, то рассмотренные выше методы приходится несколько видоизменить.

Однако, если при решении задач для уравнений Лапласа или Пуассона используется метод установления, то стационарное уравнение Лапласа или Пуассона трансформируется в нестационарное уравнение (5.71), являющееся уже уравнением параболического типа, с введением однородного начального условия (5.76), т.е.  $\psi(x, y) \equiv 0$ . В этом случае все выше рассмотренные методы применяются без изменения.

Методы расщепления напрямую можно применять также и к решению стационарных задач, *заменяв номер временного слоя номером итерации*. При этом в соответствующем конечно-разностном методе конечно-разностная производная по времени  $\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau}$  будет отсутствовать.

В качестве начального приближения на нулевой итерации можно использовать линейную интерполяцию краевых условий (5.72)–(5.75) так, как это делалось в разностно-итерационном методе Либмана (см. разд. 5.3).